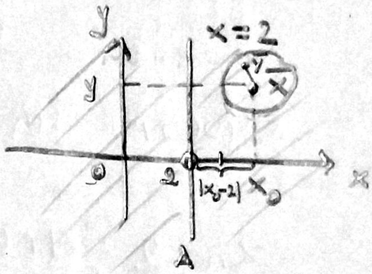
- Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα σύνολα μέσα στον $(\mathbb{R}^2, d_2)$, με $d_2 = \sqrt{(\ )^2+(\ )^2}$ είναι κλειστά.

α. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=2\}$, β. $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$

γ. $\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y^2\}$, δ. $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>x^2\}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. 1ος τρόπος (Μετρικό): Αρκεί νδο ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^2$. Δηλ.



$\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^2\setminus A$, $\exists\, \varepsilon>0$ $B_{d_2}(\bar{x},\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2\setminus A$

Έστω λοιπόν $\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, δηλ. $\bar{x} = (x_0, y_0)$ όπου $x_0 \neq 2$ και $y_0 \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε ως

$\varepsilon := \dfrac{|x_0-2|}{2} > 0$ έχουμε ότι $B_{d_2}(\bar{x},\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2\setminus A$

Πράγματι αν $\bar{y} = (y_1,y_2) \in B_{d_2}(\bar{x},\varepsilon)$ τότε

$d_2(\bar{y},\bar{x}) = \sqrt{\underbrace{(y_1-x_0)^2+(y_2-y_0)^2}}< \varepsilon.$ [θδο $y_1 \neq 2$]

$|y_1-x_0| \leq$

Οπότε, $|y_1-x_0| < \varepsilon$

Έτσι, $|2-y_1| \geq |2-x_0| - |x-x_0| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0$

Τότε, $y_1 \neq 2$. Άρα, A κλειστό.

<u>β' τρόπος</u>: Θδο $\forall (x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ και $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

με $(x_n,y_n) \xrightarrow{d_2} (x,y) \implies (x,y)\in A$.

Έστω λοιπόν $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ και $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με

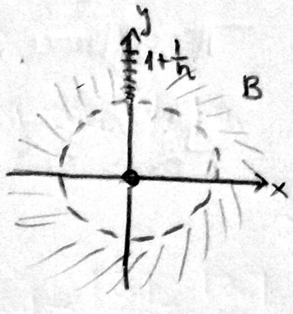
$(x_n,y_n) \xrightarrow{d_2} (x,y)$ $[\Leftrightarrow x_n \to x$ και $y_n \to y]$

Εφόσον, η $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, έπεται ότι

$x_n = 2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Όμως $x_n \to x$ και άρα

$\lim\limits_{n} x_n = \underbrace{x = 2}$. Άρα $(x,y)\in A$.

β. Θδο το B όχι κλειστό. Αρκεί λοιπόν να βρω ακολουθία $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ και ένα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $(x_n,y_n) \xrightarrow{d_2} (x,y)$ αλλά $(x,y)\notin B$.

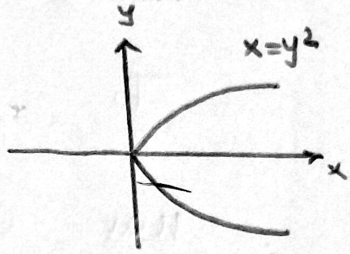


Μια κατάλληλη ακολουθία $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ είναι η $(x_n,y_n) = (0, 1+\frac{1}{n})$ η οποία συγκλίνει (ως προς τη d_2) στο $(0,1)$ αλλά

το $(0,1) \notin B$ (γιατί $0^2+1^2 \neq 1$)

Άρα, B όχι κλειστό

γ. Θδο το Γ είναι κλειστό



Έστω λοιπόν $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ τ.ω $(x_n,y_n) \xrightarrow{d_2} (x,y) \in \mathbb{R}^2$

και θδο $(x,y) \in \Gamma$, ή αλλιώς $y^2=x$

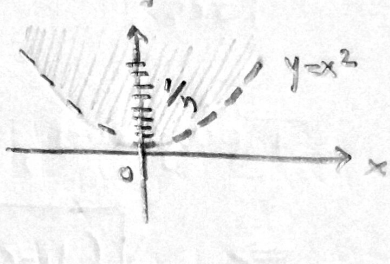
Εφόσον $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma$, έπεται $y_n^2 = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

αλλά, $x_n \to x$ και $y_n \to y$.

Οπότε, $\lim\limits_n y_n^2 \overset{x^2 \text{ συνεχής}}{=\!=} (\lim\limits_n y_n)^2 = y^2 = x = \lim\limits_n x_n$

Άρα, $y^2=x$ και αυτό θα πει πως Γ κλειστό

δ. Θδο το Δ όχι κλειστό



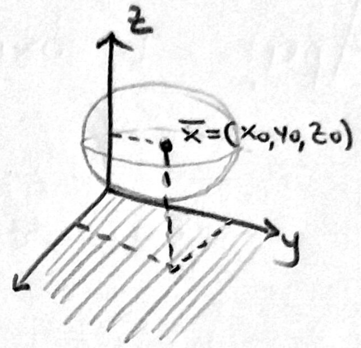
Η ακολουθία $(x_n,y_n) = (0,\frac{1}{n}) \in \Delta$

μάλιστα $(x_n,y_n) \to (0,0)$ και $(0,0) \notin \Delta$

(αφού $0 \neq 0^2$). Άρα, Δ όχι κλειστό

• Ν.δ.ο. το σύνολο $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0\}$ είναι κλειστό σύνολο (με τον ορισμό).

ΛΥΣΗ:



Το $E = Oxy$

και θ.δ.ο. E κλειστό

δηλ. αρκεί ν.δ.ο. $\mathbb{R}^3\setminus E$ ανοιχτό

δηλ. $\forall\, \bar{x}\in \mathbb{R}^3\setminus E : \exists\, \varepsilon>0 ; \ B_{d_2}(\bar{x},\varepsilon)\subseteq \mathbb{R}^3\setminus E$

Έστω $\bar{x}=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3\setminus E$ [δηλ. $z_0\neq 0$]

Μετρώ την κατακόρυφη απόσταση του $\bar{x}$ (δηλ. το πόσο απέχει το z_0) από το Oxy

και θέτω ως $\varepsilon := \frac{|z_0-0|}{2} = \frac{|z_0|}{2}$.

Τότε, $B_{d_2}(\bar{x},\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}^3\setminus E$. (δηλ. αν $y\in B_{d_2}(\bar{x},\varepsilon)$ τότε $y\in\mathbb{R}^3\setminus E$, δηλ. $y_3\neq 0$)

Πράγματι, έστω $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)\in B_{d_2}(\bar{x},\varepsilon)$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{(y_1-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(y_3-z_0)^2}}_{|y_3-z_0|\ \le} < \varepsilon := \frac{|z_0|}{2}. \Rightarrow$$

$|y_3-z_0|<\frac{|z_0|}{2}$. Αρκεί ν.δ.ο. $|y_3|>0$ και τότε $y_3\neq 0$.

Οπότε, $|y_3|=|y_3-z_0+z_0|\geq|z_0|-|y_3-z_0|>|z_0|-\frac{|z_0|}{2}=\frac{|z_0|}{2}>0$